Aufgabe 1 (*Gauss-Krümmung einer winkeltreuen Fläche*) (4 Punkte)
Die erste Fundamentalform g einer C^3-regulären Fläche $F : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ habe die Gestalt $g(q) = e^{2f(q)}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für eine Funktion $f : U \to \mathbb{R}$. Berechnen Sie alle Christoffelsymbole und zeigen Sie, dass die Gauss-Krümmung gegeben ist durch $K = -e^{-2f}\left(\partial_{11}^2 f + \partial_{22}^2 f\right)$.

Aufgabe 2 (*Rechenregeln für* $\frac{\nabla}{dt}$) (4 Punkte)
Sei $F \in C^2(U, \mathbb{R}^3)$ eine reguläre Fläche. Zeigen Sie, dass für die kovariante Ableitung längs einer Kurve $\gamma \in C^1(I, U)$ die folgenden Rechenregeln gelten:

$$(i) \quad \frac{\nabla(\lambda\xi + \mu\eta)}{dt} = \lambda\frac{\nabla\xi}{dt} + \mu\frac{\nabla\eta}{dt} \qquad \text{für } \lambda, \mu \in \mathbb{R}.$$

$$(ii) \quad \frac{\nabla(\varphi\xi)}{dt} = \varphi\frac{\nabla\xi}{dt} + \varphi'\xi \qquad \text{für } \varphi \in C^1(I).$$

$$(iii) \quad \frac{d}{dt}g(\xi, \eta) = g\Big(\frac{\nabla\xi}{dt}, \eta\Big) + g\Big(\xi, \frac{\nabla\eta}{dt}\Big).$$

Aufgabe 3 (*Satz von Clairaut*) (4 Punkte)
Sei $F : U \to \mathbb{R}^3$ eine C^2-reguläre Rotationsfläche mit zugehöriger ersten Fundamentalform g, d.h.

$$F(t, \theta) = (r(t)\cos\theta, r(t)\sin\theta, h(t)).$$

Sei $\gamma \in C^2(I, U)$ eine Geodätische bzgl. g. Bezeichne mit $\beta(s) \in [0, \pi]$ den Winkel, mit dem die Kurve $(F \circ \gamma)(s)$ den Breitenkreis in Höhe $(h \circ \gamma)(s)$ mit Radius $(r \circ \gamma)(s)$ schneidet. Zeigen Sie, dass $(r \circ \gamma)(s)\cos\beta(s)$ konstant ist.

Aufgabe 4 (*Geodäten auf Kegeln*) (4 Punkte)
Sei $c \in C^2(\mathbb{R}, \mathbb{S}^2)$ eine reguläre, einfach geschlossene, nach der Bogenlänge parametrisierte Kurve mit Periode $L < 2\pi$ und $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ die Kegelfläche gegeben durch $F(re^{i\theta}) = rc(\theta)$ (vergleiche Aufgabe 2, Serie 5). Zeigen Sie:

(i) Ist $p \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ein Punkt auf der Kegelfläche, so ist die kürzeste Verbindung auf der Fläche von p zum Nullpunkt die gerade Strecke von p zum Nullpunkt.

(ii) Sind $p, q \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ zwei Punkte auf der Kegelfläche, so geht die kürzeste Verbindung auf der Fläche von p nach q nicht durch den Nullpunkt.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Mittwoch, den 27.07.11.